සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

007580

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1997 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1997 ஓகஸ்த் (புதிய பாடத்திட்டம்)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1997 (New Syllabus)

ශුද්ධ ගණිතය I
தூய கணிதம் I
Pure Mathematics I

05 | S | I

පැය තුනයි / மூன்று மணி / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) A, B, C යනු ξ සර්වත්‍ර කුලකයෙක ඕනෑම උපකුලක තුනක් යැයි සිතමු.
$A - B$ අර්ථ දක්වන්න.
වෙන් රූප සටහන් භාවිත නොකර
$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$ සහ $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$
බව සාධනය කරන්න. [කුලක වීජ ගණිතයේ යම් න්‍යායයන් ඔබ උපයෝගී කර ගන්නේ නම් ඒවා ප්‍රකාශ කළ යුතුය.]
$\xi = \mathbb{N}$ යැයි ගෙන,
$A-(B\cap C)=(A-B)\cap C$
යන්න අනිවාර්යයෙන්ම සත්‍ය නොවන බව පෙන්වීම සඳහා ප්‍රති නිදර්ශනයක් සොයන්න.

(ආ) $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{Z},\ g:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{N}$ සහ $h:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$ යනු පිළිවෙලින්
$f(x)=x^2-2,\ g(x)=|x+2|$ සහ $h(x)=\sqrt{x}$ මගින් අර්ථ දක්වෙන ශ්‍රිත යැයි සිතමු.
f එකට - එක වුව ද මතට නොවන බව ද g මතට වුව ද එක - එක නොවන බව ද සාධනය කරන්න.
$g\circ f$ සහ $h\circ g$ සංයුක්ත ශ්‍රිත සොයන්න; මෙහි $(f_1\circ f_2)(x)$ යන්නෙන් $f_1(f_2(x))$ ගෙන දේ.
එනයින්, $h\circ(g\circ f)$ සහ $(h\circ g)\circ f$ ශ්‍රිත සමාන බව සාධනය කරන්න.

2. (අ) $f(a,b,c)\equiv(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ හි සාධක සොයන්න.
$f(a,b,c)$ යන්න,
$(a+b+c)^{1997}-a^{1997}-b^{1997}-c^{1997}$ හි සාධකයක් බව අපෝහනය කරන්න.

(ආ) α සහ β යනු $x^2+qx+1=0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද γ සහ δ යනු $x^2+x+q=0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද සිතමු.
$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)=(\gamma^2+q\gamma+1)(\delta^2+q\delta+1)$
බව පෙන්වන්න.
දී ඇති වර්ගජ සමීකරණ දෙකටම පොදු වූ තාත්ත්වික මූල, අඩුවශයෙන් එකක්වත් තිබෙන පරිදි වූ q හි අගය සියල්ල නිර්ණය කරන්න.

3. (අ) (i) (α) $x^3+3x^2<x+3$
(β) $|x+2|+|x-3|<7$
ඉහත සඳහන් එක් එක් අසමානතාව සඳහා එය තෘප්ත කරන x හි අගයයන් කුලකය සොයන්න.
(ii) එකම රූප සටහනෙහි, $y=x^2-4x+3$ සහ $x^2+y^2=4$ වක්‍රවල දළ රූප සටහන් ඇඳ, $y\le x^2-4x+3$ සහ $x^2+y^2\le 4$ අසමානතා දෙකම සපුරාලන පෙදෙස් අඳුරු කරන්න.

(ආ) "විසංවාදයක් මගින් සාධනය" ක්‍රමය යොදා, x^3+2x^2+2x+2 යන්නට, $x\pm n$ ආකාරයේ සාධකයක් නොතිබෙන බව පෙන්වන්න; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.

[අනෙක් පිට බලන්න.

4. (අ) "*COEFFICIENT*" වචනයෙහි අක්ෂර 11 න් සැදෙන විවිධ සංකරණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.
තවද, *COEFFICIENT* වචනයෙහි අක්ෂර 11 න් සැදිය හැකි, අක්ෂර හතරක් අඩංගු එකිනෙකට වෙනස් තේරීම් සංඛ්‍යාව ද සොයන්න.

(ආ) A බැගයෙහි සුදු බෝල 8 ක් සහ කලු බෝල 6 ක් තිබෙන අතර B බැගයෙහි සුදු බෝල 6 ක් සහ කලු බෝල 3 ක් තිබේ.

(i) බෝල 6 ම එකම බැගයෙන් ලැබේ නම්

(ii) කලු බෝල බැග් දෙකෙන් ඕනෑම එක් බැගයකිනුත් සුදු බෝල අනෙක් බැගයෙනුත් ලැබේ නම්

(iii) බෝල ලැබෙන බැග සම්බන්ධයෙන් කිසිම සීමාකිරීමක් නොමැති නම්

එක් එක් අවස්ථාව සඳහා, සුදු බෝල 4 ක් සහ කලු බෝල 2 ක් ඇතුලත් වන සේ බෝල 6 කින් යුත් කාණ්ඩ කොපමණක් තෝරා ගත හැකි ද?

5. (අ) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r x^r$ යන්න උපකල්පනය කිරීමෙන් $\sum_{r=0}^{n} C_r$ සහ $\sum_{r=0}^{n} C_r^2$ ලබා ගන්න; මෙහි $n \in \mathbb{N}$.

එනයින්, $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ අතරෙන් වරකට දෙකක් බැගින් ගත් විට ලැබෙන ගුණිතවල ඓක්‍යය සොයන්න.

(ආ) λ නිශ්ශූන්‍ය නියතයක් විට,

$(1-\lambda x)^9 = 1 - px + qx^2 - rx^3 + \ldots$ යැයි දී ඇති විට, p හි අගයත් q හි අගයත් r හි අගයත් λ ඇසුරෙන් ලබාගන්න.

එනයින්, $(1-x)^9(1-3x)^9$ හි ප්‍රසාරණයේ x^3 හි සංඛ්‍යාත්මක සංගුණකය සොයන්න.

6. (අ) $r \geq 1$ සඳහා,

$$u_r = \frac{\sqrt{r}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{r})}$$

යැයි දී ඇත.
$r > 1$ සඳහා $f(r-1) - f(r) = u_r$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න.

$\sum_{r=1}^{n} u_r = 2u_1 - \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ යන්න 1 ට අභිසාරී වන බව පෙන්වීම සඳහා ඉහත ප්‍රතිඵලය යොදන්න.

(ආ) $n \geq 1$ සඳහා, $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{r}}$ යැයි ගනිමු. ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය යෙදීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

$n \geq 1$ සඳහා $\sqrt{n} \leq S_n \leq 2\sqrt{n}$ බව සාධනය කරන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}$ ශ්‍රේණිය අපසාරී බව අපෝහණය කරන්න.

$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ යනු $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ වන පරිදි වූ ධන පදවලින් යුත් අනුක්‍රමයක් නම්,

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ශ්‍රේණිය අනිවාර්යයෙන්ම අභිසාරී වේ යැයි නිගමනය වේ ද?
ඔබගේ උත්තරයට හේතු දක්වන්න.

7. (අ) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}$ සොයන්න.

(ආ) සුදුසු ශ්‍රිත අවකලනය කිරීමෙන්, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ සඳහා $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$

බව සාධනය කරන්න.

එනයින්, $\lim_{x \to 0+} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න.

$\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$ බව අපෝහණය කරන්න.

(ඇ) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය පහත දක්වෙන අයුරින් අර්ථ දක්වේ.

$$f(x) = \begin{cases} 25x^2 & , \dfrac{-3}{25} \le x \le 80 \\ mx + 240, & 80 < x \text{ හෝ } x < -\dfrac{3}{25} \end{cases}$$

m ට විශේෂ අගයක් දීමෙන් $\mathbb{R}$ තුළ සෑම x හි දී f සන්තතික කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

m හි අගය ප්‍රකාශ කළ යුතුය.

8. (අ) f යනු, $f(0) = 0$ සහිතව $x = 0$ දී අවකල්‍ය වූ x හි ඉරට්ටේ ශ්‍රිතයක් නම්,

$f'(0) = 0$ බව සාධනය කරන්න.

(ආ) ප්‍රමූලධර්ම මගින්,

$$\frac{d}{dx}(\sin(3x)) = 3\cos(3x)$$

බව සාධනය කරන්න.

(ඇ) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය මතු දක්වෙන අයුරින් අර්ථ දක්වේ.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 4x \ , \ x \le 0 \\ x(x-4) \ , \ 0 < x < 3 \\ 2x - 9 \ , \ 3 \le x \end{cases}$$

$x = 0$ දී ත් $x = 3$ දී ත් f අවකල්‍ය දැයි නිර්ණය කරන්න.

(ඈ) $x > 0$ සඳහා $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ නම්

$$2y\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \frac{1}{4\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}$$

බව පෙන්වන්න.

9. $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x+2)(x-4)}$ ලෙස දී ඇත් නම්, f හි උපරිම සහ අවම (ඒවා පවතී නම්) සොයන්න.

තවද, $f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ සිරස් සහ තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛවල සමීකරණ ලබා ගෙන, $f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය භාවිත කරමින් $f(x) - \ln(x-3)$ හි ශූන්‍යයන් සංඛ්‍යාව නිර්ණය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. (අ) f සහ g යනු $[-a, a]$ ප්‍රාන්තරය මත අනුකලනා ශ්‍රිත දෙකක් යැයි සිතමු.
$[-a, a]$ හි සියලු ම x සඳහා $f(-x) = f(x)$ සහ $g(-x) = -g(x)$ යැයි සිතමු.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{සහ} \quad \int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$$

බව පෙන්වන්න.

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2 + x^3}{(4 - x^2)^{3/2}}\,dx \text{ අගයන්න.}$$

(ආ) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යෙදීමෙන්,

$$\int_{0}^{a} x^2 h'''(x)\,dx = a^2 h''(a) - 2a h'(a) + 2h(a) - 2h(0) \text{ බව පෙන්වන්න;}$$

මෙහි $h'(x) = \frac{dh}{dx}$, $h''(x) = \frac{d^2h}{dx^2}$ සහ $h'''(x) = \frac{d^3h}{dx^3}$.

$$\int_{0}^{1} \frac{x^2}{(x + 1)^{5/2}}\,dx \text{ අගයන්න.}$$

11. (අ) $f(x) = 0$ හි මූලයක් සඳහා ආසන්න අගයක් නිර්ණය කිරීම පිණිස වූ නිව්ටන් - රැප්සන් පුනඃකරණය සූත්‍රය ව්‍යුත්පන්නය කරන්න.
$f(x) = 4x - e^x$ ට 0·3 සහ 0·4 අතර මූලයක් පවතින බව පෙන්වන්න. නිව්ටන් - රැප්සන් සූත්‍රයේ මූලය සඳහා ආරම්භක සන්නිකර්ෂණය $x_0 = 0{\cdot}35$ ලෙස ගනිමින්, මෙම මූලයට වැඩිදුර සන්නිකර්ෂණ දෙකක් ලබාගන්න. ඔබගේ උත්තර දශමස්ථාන තුනකට නිවැරදිව දිය යුතු ය. [$e = 2{\cdot}718$ බව උපකල්පනය කරන්න.]

(ආ) $y = \frac{e^x}{1 + x^2}$ ද $y^{(r)}$ යන්නෙන් $\frac{d^r y}{dx^r}$ ගෙන දේ ද නම්
$(1 + x^2)\,y^{(3)} + 6x\,y^{(2)} + 6\,y^{(1)} = e^x$
බව පෙන්වන්න.
ගණිත අභ්‍යුහනයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $r \geq 3$ සඳහා $(1 + x^2)\,y^{(r)} + 2r\,x\,y^{(r-1)} + r\,(r-1)\,y^{(r-2)} = e^x$ බව සාධනය කරන්න.

එනයින්, $\frac{e^x}{1 + x^2}$ සඳහා මැක්ලෝරින් ශ්‍රේණියේ මුල් පද පහ ලබා ගන්න.

12. (අ) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1}$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ආ) λ පරාමිතියක් විට, $x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0$ සමීකරණයෙන් දෙනු ලබන වක්‍ර කුලය සලකන්න.
දී ඇති කුලයේ අවකල සමීකරණය නිර්ණය කරන්න.
ප්‍රලම්බ පරාවක්‍රවල අවකල සමීකරණය

$$2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x^2 = 0$$

බව පෙන්වන්න.
දී ඇති වක්‍ර කුලයේ ප්‍රලම්බ පරාවක්‍රවල සමීකරණ ලබා ගන්න.